Нахождение всех ситуаций, оптимальных по Парето и слейтеру, в биматричной игре.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} (2,8) & \cancel{(8,2)} & (4,7) \\ \cancel{(1,2)} & \cancel{(0,5)} & \cancel{(5,6)} \\ (6,6) & \cancel{(3,0)} & (8,4) \end{array}$$

$P = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3)\}$

$S = P \cup \{(1,2), (2,3)\}.$

Нахождение всех сит. равновесия в чистых и смешанных стратегиях в биматричной игре с 2×2 матрицами.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ $(i^0, j^0) = (1,2), (2,1).$

равновесие в смешанных стратегиях.

первый способ. $q^0 = (q_1^0, 1-q_1^0)$, $p^0 = (p_1^0, 1-p_1^0)$

Если $q_1^0 = 1$ (или $j^0 = 1$), то $i^0 = 2$

Если $q_1^0 = 0$ ($j^0 = 2$), то $i^0 = 1$

Пусть $0 < q_1^0 < 1$. По свойству дополн. нежёсткости

$B(p^0, 1) = B(p^0, 2) = B(p^0, q^0)$ $3p_1^0 + 5(1-p_1^0) = 3p_1^0 + 2(1-p_1^0)$

$\Downarrow$

$p_1^0 = 1.$

По свойству доп. нежёсткости

$A(1, q^0) = A(p^0, q^0)$ $\Rightarrow$ $A(2, q^0) \leq A(1, q^0)$

$A(2, q^0) \leq A(p^0, q^0)$ по $(*)$ $5q_1^0 + 1 - q_1^0 \leq 2q_1^0 + 3(1-q_1^0)$

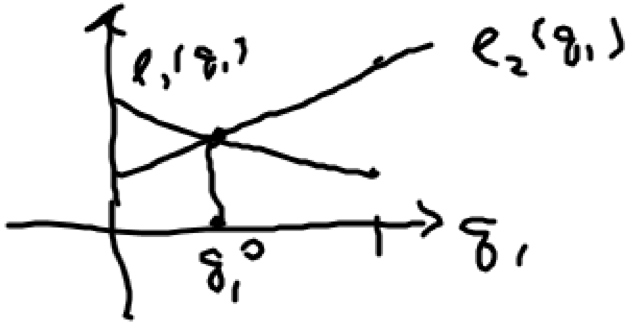
$3q_1^0 \leq 2(1-q_1^0)$ $0 \leq q_1^0 \leq \frac{2}{5}.$

Второй способ. использование множеств наилучших ответов. $0 \le p_1 \le 1$, $0 \le q_1 \le 1$. // $A(p,q)$

$$P(q_1) = \underset{0 \le p_1 \le 1}{\mathrm{Argmax}} \left[p_1 A(1,q) + (1-p_1) A(2,q) \right]$$

$$A(1,q) = l_1(q_1) = 2q_1 + 3(1-q_1) = 3 - q_1$$

$$A(2,q) = l_2(q_1) = 5q_1 + 1 - q_1 = 1 + 4q_1$$



$l_1 \,?\, l_2$ $\qquad 3 - q_1 = 1 + 4q_1$

$$q_1^0 = \frac{2}{5}$$

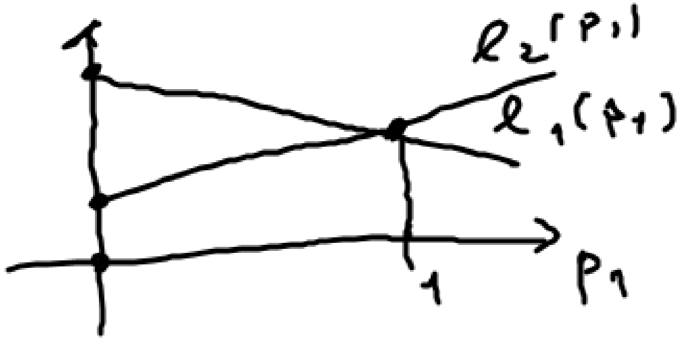
$$P(q_1) = \begin{cases} \{1\}, & 0 \le q_1 < q_1^0 = \frac{2}{5} \\ [0,1], & q_1 = \frac{2}{5} \\ \{0\}, & \frac{2}{5} < q_1 \le 1 \end{cases}$$

Теперь построим

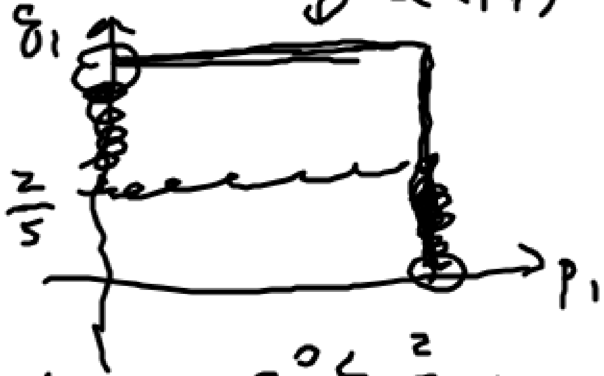
$$Q(p_1) = \underset{0 \le q_1 \le 1}{\mathrm{Argmax}}\ B(p,q) = \underset{0 \le q_1 \le 1}{\mathrm{Argmax}} \left[q_1 B(p,1) + (1-q_1) B(p,2) \right]$$

$$B(p,1) = \ell_1(p_1) = 3p_1 + 5(1-p_1) = 5 - 2p_1$$

$$B(p,2) = \ell_2(p_1) = 3p_1 + 2(1-p_1) = 2 + p_1$$



$p_1^0 = 1.$ $\quad \ell_1 \cap \ell_2.$



$$Q(p_1) = \begin{cases} \{1\}, & 0 \le p_1 < 1 = p_1^0 \\ [0,1] & p_1 = 1 \end{cases}$$

(p^0, q^0): $\quad p_1^0 = 1, \quad 0 \le q_1^0 \le \frac{2}{5}.$

Оптимальные стратегии и наилучший гарантированный результат в множествах стратегий M_u и $\bar{M}$.

Пусть $i \in \{1,2\}$ - контролируемый фактор, $j \in \{1,2\}$ - стратегия противника, z - случайный фактор - случайная величина, равномерно распределённая на $[0,3]$.

1. Оперирующая сторона получает информацию о j в начале операции. Стратегии $i(j) \in M_u$. Противник не знает z.

$$F_2(M_u) = \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} \bar{F}(i,j) \qquad \bar{F}(i,j) = \frac{1}{3}\int_0^3 F(i,j,z)\,dz,$$

Пример. $(F(i,j,z)) = \begin{pmatrix} z & 4 \\ 5 & 2z \end{pmatrix}$. Тогда $(\bar{F}(i,j)) = \begin{pmatrix} 3/2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$

$F_2(M_u) = 4$, $i^0(1) = 2$, $i^0(2) = 1$ - оптимальная стратегия.

2. Оперирующая сторона получила информацию о j и z в начале операции. Противник не знает реализации z.

Множество стратегий вида $\hat{i}(j,z) \in \tilde{M}$.

$$F_2(\hat{M}) = \min_{j=1,2} \frac{1}{3}\int_0^3 \max_{i=1,2} F(i,j,z)\,dz.$$

Если $j=1$, то $\frac{1}{3}\int_0^3 \max_{i=1,2} F(i,1,z)\,dz =$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \max(z,5)\,dz = \frac{1}{3}\int_0^3 5\,dz = 5.$$

Если $j=2$, то $\frac{1}{3}\int_0^3 \max_{i=1,2} F(i,2,z)\,dz = \frac{1}{3}\int_0^3 \max[4, 2z]\,dz =$

$$= \frac{1}{3}\left[\int_0^2 4\,dz + \int_2^3 2z\,dz\right] = \frac{1}{3}\left[8 + 2\cdot\frac{9-4}{2}\right] = \frac{13}{3} < 5 \Rightarrow F_2(\hat{M}) = \frac{13}{3}.$$

$i^0(j,z)$: $i^0(1,z) = 2$. $i^0(2,z) = \begin{cases} 1, & 0 \le z < 2 \\ 1,2, & z = 2 \\ 2 & 2 < z \le 3 \end{cases}$ – две оптимальных стратегии.

3. Если в последнем случае противник знает z, то

$$F_2(\tilde{M}) = \frac{1}{3}\int_0^3 \min_{j=1,2}\max_{i=1,2} F(i,j,z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^3 \min[5, \max[4, 2z]]\,dz =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int_0^2 4\,dz + \int_2^{5/2} 2z\,dz + \int_{5/2}^3 5\,dz\right] = \frac{1}{3}\left[8 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 + \frac{5}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[4 + \frac{25}{4} + \frac{10}{4}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{51}{4}\right] < \frac{13}{3}, \text{ т.к. } 51 < 52.$$

Если в случае 1 противник знает z, то

$F_2(M_u) = \max_{\tilde{i} \in M_u} \frac{1}{3}\int_0^3 \min_{j=1,2} F(\tilde{i}, j, z)\,dz$. Поэтому здесь

$W(\tilde{i}) = \frac{1}{3}\int_0^3 \min_{j=1,2} F(\tilde{i}, j, z)\,dz$ и нужно перебирать $\tilde{i} \in M_u$.

Например, пусть $\tilde{i}_1(1) = 2$, $\tilde{i}_1(2) = 1$. Тогда

$$W(\tilde{i}_1) = \frac{1}{3}\int_0^3 \min[5, 4]\, dz = 4$$

Если $\tilde{i}_2(1) = 1$, $\tilde{i}_2(2) = 2$, то

$$W(\tilde{i}_2) = \frac{1}{3}\int_0^3 \min(z, 2z]\, dz = \frac{1}{3}\int_0^3 z\, dz = \frac{1}{6}\cdot 9 = \frac{3}{2}$$

Если $\tilde{i}_3(1) = \tilde{i}_3(2) = 1$, то

$$W(\tilde{i}_3) = \frac{1}{3}\int_0^3 \min[z, 4]\, dz = \frac{1}{3}\int_0^3 z\, dz = \frac{3}{2}$$

Если $\tilde{i}_4(1) = \tilde{i}_4(2) = 2$, то

$$W(\tilde{i}_4) = \frac{1}{3}\int_0^3 \min[5, 2z]\, dz = \frac{1}{3}\Big[\int_0^{5/2} 2z\, dz + \int_{5/2}^3 5\, dz\Big] =$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\Big(\frac{5}{2}\Big)^2 + \frac{5}{2}\Big] = \frac{1}{3}\Big[\frac{25}{4} + \frac{5}{2}\Big] = \frac{1}{3}\cdot\frac{35}{4} = \frac{35}{12} < 3. \quad F_2(M_a) = 4.$$

Итак, наилучший гарант. рез. не меняет.